Grado en Matemáticas
Examen de Análisis Funcional

1. (1 punto) Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = t \int\limits_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Prueba que T es un operador lineal continuo y calcula su norma.

2. (2 puntos) Sea $A = \{e_{2n-1} + e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

    a) Describe los espacios $M = A^{\perp}$ y $M^{\perp}$.

    b) Calcula las proyecciones ortogonales sobre M y $M^{\perp}$.

3. (1 punto) Sea X un espacio normado y $x \in S_X$. Prueba que existe un subespacio cerrado M de X tal que $X = M \oplus \mathbb{K}\,x$ y $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

4. (1 punto) Prueba que si X es un espacio normado reflexivo y $x^* \in X^*$, entonces existe $x \in S_X$ tal que $x^*(x) = \|x^*\|$. ¿Es esto cierto si el espacio no es reflexivo?

5. (1 punto) Sea $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $x \in \ell_1$ se verifica que la sucesión $\{x(n)u(n)\}$ está acotada. Prueba que u está acotada.

6. (1 punto) Prueba que todo conjunto w-compacto en un espacio normado está acotado.

7. (3 puntos) Desarrolla uno de los temas siguientes:

    - Versión analítica del teorema de Hahn-Banach. Consecuencias.
    - Teorema de la aplicación abierta.
    - Las topologías débil y débil*. Teorema de Mazur. Adherencias débil y débil* de la bola unidad.

Pondré las calificaciones en el SWAD. Revisión de exámenes: día 26 de enero de 10h a 13h en mi despacho (nº17, Dpto. Análisis Matemático).

Granada, 19 de enero de 2018